

# Análisis de sistemas vibratorios: De ecuaciones diferenciales de orden 2 a fraccionario

Analysis of vibratory systems: From differential equations of order 2 to fractional

Análise de sistemas vibratórios: De equações diferenciais de ordem 2 a fracionárias

Jesús Gabino Puente-Córdova<sup>1</sup>, Fernando Javier Elizondo-Garza<sup>1</sup>, Guadalupe Evaristo Cedillo-Garza<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratorio de Vibraciones Mecánicas, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Universidad Autónoma de Nuevo León, San Nicolás, N. L. México

[jesus.puentecr@uanl.edu.mx](mailto:jesus.puentecr@uanl.edu.mx), ORCID:0000-0002-1095-8752,

[fjelizon@gmail.com](mailto:fjelizon@gmail.com), ORCID:0000-0002-5000-3969,

[guadalupe.cedillogr@uanl.edu.mx](mailto:guadalupe.cedillogr@uanl.edu.mx)

## RESUMEN

El diseño vibratorio se desarrolló, en una primera época, buscando que fuera lo más simple posible, seleccionándose para la implementación práctica un sistema de elementos que tuvieran un comportamiento lineal en base a materiales clásicos o restringiendo sus condiciones de operación con el mismo fin. Esto permitió predicciones razonables que resultaron apropiadas para los procesos de formación de ingenieros. Este esquema llevaba a una ecuación diferencial de orden dos cuya solución es una función senoide, la cual es enseñada desde la educación media superior, y que resulta fácilmente aceptada para representar el comportamiento de los sistemas vibratorios simples. El advenimiento de la computación y desarrollos matemáticos han permitido considerar para diseño los sistemas vibratorios no lineales, y entre los enfoques para su análisis, en los últimos años se ha explorado el considerar la representación de sistemas vibratorios mediante ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. En esta ponencia se compara el análisis de ecuaciones diferenciales de orden dos con las de orden fraccionario, en específico para el caso de amortiguamiento no lineal, usando la derivada fraccionaria de Caputo, cuya solución, para este trabajo se desarrolla por medio de la función de Mittag-Leffler.

**PALABRAS CLAVE:** Vibraciones mecánicas, ecuaciones diferenciales, orden fraccionario, Caputo, Mittag-Leffler.

## ABSTRACT

The vibratory design was develop initially seeking to be as simple as possible, selecting, for the practical implementation of a system, elements that had a linear behavior, based on classic materials or restricting their operating conditions for the same purpose. This allowed reasonable predictions that were appropriate for engineering training processes. This scheme led to a differential equation of order two whose solution is a sinusoid function, which is taught since high school, and which is easily accepted to represent the behavior of simple vibratory systems. The advent of computing and mathematical developments has made it possible to consider nonlinear vibratory systems for design, and, among the many approaches for their analysis, in recent years the representation of vibratory systems by fractional order differential equations has been explored. In this paper, the analysis of differential equations of order two is compared with those of fractional order, specifically for the case of nonlinear damping, using the fractional derivative of Caputo, whose solution, for this paper, was approached by means of the Mittag-Leffler function.

**KEYWORDS:** Mechanical vibrations, differential equations, fractional order, Caputo, Mittag-Leffler.

## RESUMO

O projeto vibratório foi desenvolvido, a princípio, buscando torná-lo o mais simples possível, selecionando para implementação prática um sistema de elementos que tivessem um comportamento linear baseado em materiais clássicos ou restringindo suas condições de operação para o mesmo fim. Isso permitiu previsões razoáveis que eram apropriadas para processos de treinamento de engenharia. Este esquema levou a uma equação diferencial de ordem dois cuja solução é uma função senoidal, ensinada desde o ensino médio e facilmente aceita para representar o comportamento de sistemas vibratórios simples. O advento da computação e desenvolvimentos matemáticos permitiram que sistemas vibratórios não lineares fossem considerados para projeto, e entre as abordagens para sua análise, nos últimos anos tem sido explorada a consideração da representação de sistemas vibratórios através de equações diferenciais de ordem fracionária. Neste trabalho, a análise das equações diferenciais de ordem dois é

comparada com as de ordem fracionária, especificamente para o caso de amortecimento não linear, utilizando a derivada fracionada de Caputo, cuja solução para este trabalho é desenvolvida por meio da função de Mittag-Leffler.

**PALAVRAS-CHAVE:** Vibrações mecânicas, equações diferenciais, ordem fracionária, Caputo, Mittag-Leffler.

## 1. INTRODUCCIÓN

Al consolidarse el área de la ingeniería de vibraciones mecánicas, la cual estudia el movimiento oscilatorio de los sistemas mecánicos, se realizó un gran trabajo de sistematización en el diseño de los mismos, y de la ingeniería en general, consistente en, por un lado, la normalización de la producción de los materiales y elementos de diseño y por otro, el desarrollo de un enfoque lineal mediante elementos matemáticos con comportamiento lineal que permitieran la predicción, buscando las expresiones lo más simples posibles, para que más personas pudieran involucrarse en el progreso tecnológico del diseño de maquinaria y dispositivos mecánicos en general. Para asegurar una vida larga de las máquinas y menos frecuencia y requerimientos de mantenimiento, en una primera época el diseño se basaba mayormente en elementos metálicos utilizados en la región proporcional o lineal.

A partir del desarrollo de los polímeros y plásticos, y otros materiales sintéticos, estos han ido mejorando cada vez más en cuanto a sus características y durabilidad de tal manera que la proporción plástico/metal ha ido aumentando. En el área de vibraciones este cambio ha inducido el uso cada vez mayor de polímeros en los soportes o suspensiones de máquinas y equipos y estos resultan en que la elasticidad y el amortiguamiento que se encontraban resueltos en elementos separados de la máquina (resortes y amortiguadores) ahora se encuentran en un mismo espacio o material, lo cual ocurre también en los metales, pero ahora con valores significativamente grandes de amortiguamiento, lo que evita tener que usar un amortiguador como elemento independiente. Lo anteriormente planteado lleva a elementos no lineales, los cuales se siguieron usando bajo el supuesto lineal, restringiendo el rango de uso y aceptando error en algunos casos. El desarrollo de paquetes de cómputo para diseño vibratorio ha empezado a generar modelos no lineales, así como nuevos parámetros para determinar la elasticidad y el amortiguamiento, los cuales aún están en progreso y no son de uso generalizado, pero se espera que, con la ayuda de la computación y el desarrollo de nuevo algoritmos, permitan tener un rango mayor de

predicción del comportamiento vibratorio. Esto con la finalidad de obtener nuevos diseños de máquinas de mayor precisión en cuanto a su movimiento vibratorio. Bajo este contexto, es en el ámbito de los amortiguadores, dado sus diferentes tipos y comportamientos no lineales, donde se vislumbra de mayor utilidad la aproximación fraccionaria en el planteamiento de las ecuaciones diferenciales que representan su comportamiento vibratorio. En esta ponencia se aborda el uso de operadores diferenciales de orden fraccionario para una mejor descripción del comportamiento oscilatorio de sistemas mecánicos (Escalante-Martínez et al., 2016, 2020; Gómez-Aguilar et al., 2012, 2015; Gómez-Aguilar et al., 2012; Martínez Jiménez et al., 2021).

## 2. CÁLCULO FRACCIONARIO

El cálculo fraccionario, también conocido como método de derivación e integración de orden arbitrario, es una herramienta matemática muy importante para el análisis de diversos fenómenos en áreas de la ciencia y la ingeniería. El génesis del cálculo fraccionario se da en 1695, cuando L' Hopital le envió una carta a Leibniz preguntándole por lo que pasaría al tener una derivada de orden  $1/2$ , a lo que le contestó: *“una paradoja de la cual algún día se extraerán cosas interesantes”* (Sánchez-Muñoz, 2011).

Posteriormente ilustres matemáticos como Fourier, Liouville, Abel, Weyl, Riemann, entre otros, comenzaron a realizar aportaciones en el intento de establecer una definición para una derivada fraccionaria. Actualmente, dos definiciones de derivada fraccionaria son las más utilizadas, la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville (ecuación 1), y la derivada fraccionaria de Caputo (ecuación 2).

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha+1-n}} d\xi \quad (1)$$

$${}_a^CD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^n(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha+1-n}} d\xi \quad (2)$$

donde  $\alpha$  es el orden fraccionario que toma valores  $n - 1 < \alpha \leq n$ ,  $t$  es el tiempo,  $\xi$  es una variable de integración,  $\Gamma(\cdot)$  es la función gamma y  $f^n$  es la derivada de orden  $n$  de  $f(t)$ .

Al resolver ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, la definición de Riemann-Liouville presenta la desventaja de no corresponder tradicionalmente con las condiciones iniciales en sistemas físicos, mientras que la definición de Caputo si lo hace. Otras definiciones empleadas en ciencias e ingeniería son: Grünwald-Letnikov, Caputo-Fabrizio, Atangana-Baleanu, Weyl, y la derivada conformable de Khalil (Ozores, 2014; Puente-Córdova et al., 2020; Sánchez-Muñoz, 2011). Sin embargo, las definiciones de las derivadas fraccionarias están limitadas por su interpretación física y geométrica, ya que, al ser definidas mediante una integral, se consideran no locales. Esto significa que la integral contiene información parcial o total sobre la historia de la función, lo cual le permite ser una herramienta ideal para modelar fenómenos con “memoria”.

Desde el punto de vista ingenieril, la interpretación geométrica de una derivada tradicional o de orden entero se asocia con la pendiente de la recta tangente, mientras que su interpretación física puede asociarse con una tasa de cambio. Respecto a una integral de orden entero, su interpretación geométrica se relaciona con el área bajo la curva, y su interpretación física puede asociarse con una acumulación. Sin embargo, hoy en día no está claro cómo debe interpretarse física y geométricamente a una derivada fraccionaria. En la literatura se reportan trabajos que tratan de dar una respuesta a esta problemática, por ejemplo (Podlubny, 2001).

El desarrollo de modelos matemáticos en ciencias e ingeniería es una actividad fundamental, ya que permiten estudiar de manera objetiva el comportamiento de diversos sistemas. La representación de diversos fenómenos o comportamientos se lleva a cabo mediante la obtención de ecuaciones diferenciales de orden entero. Sin embargo, hay reportes en la literatura que ponen en evidencia la pobre descripción de los datos experimentales de este tipo de ecuaciones. Para resolver dicha problemática, se opta por utilizar operadores fraccionarios, es decir, emplear el método de derivación e integración de orden arbitrario (Puente-Córdova et al., 2018; Reyes-Melo et al., 2004, 2005). Para cumplir dicho objetivo, es importante tomar en cuenta la función gamma y la función Mittag-

Leffler, las cuales se describen brevemente a continuación.

-*Función Gamma*: Una definición de la función gamma  $\Gamma(x)$  es la proporcionada empleando el límite de Euler, evaluada para  $x > 0$ :

$$\Gamma(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{N! \cdot N^x}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdots (x+N)} \right] \quad (3)$$

También se define mediante una integral de la siguiente forma, la cual es más utilizada en la literatura:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0, t > 0 \quad (4)$$

Esta función matemática generaliza al factorial, debido a que permite calcular números fraccionarios positivos, negativos e inclusive complejos. Respecto a los números enteros negativos, el resultado de evaluar la función gamma tiende al infinito. Esto se puede apreciar de mejor manera en la figura 1.

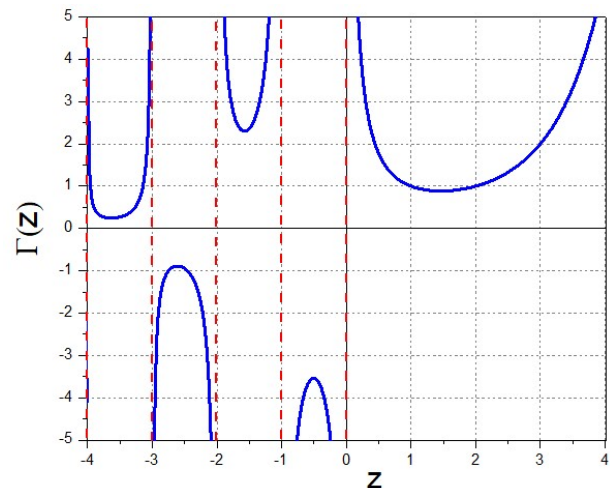


Figura 1. Función gamma.

-*Función Mittag-Leffler*: En la solución de ecuaciones diferenciales de orden entero con coeficientes constantes, es común encontrar a la función exponencial  $e^{-x}$ . Respecto a la solución de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, aparece la opción de la función trascendental Mittag-Leffler M-L (Ertik et al., 2015; Gómez Aguilar et al., 2012). Su introducción en 1903-1905 se debe al matemático sueco Magnus Gösta Mittag-Leffler, y desde dicha época hasta aproximadamente 1990, los matemáticos, físicos e ingenieros rara vez consideraron utilizar esta función. La ecuación 5 corresponde a la definición de la función M-L de un parámetro  $\beta$ , y  $z$  forma parte del conjunto de los números complejos.

$$M_{\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\beta n + 1)}, \quad \beta \in \mathbb{R}(z), \quad z \in \mathbb{C} \quad (5)$$

Es importante mencionar que una gran cantidad de sistemas físicos experimentan fenómenos de relajación que pueden ser interpretados a través de una ley de potencia del tipo  $-t^{\beta}$ , donde  $t$  es el tiempo y  $\beta$  un exponente. Entonces, si se evalúa dicha ley de potencia con ayuda de la función de M-L, se obtiene lo siguiente:

$$M_{\beta}(-t^{\beta}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{\beta n}}{\Gamma(\beta n + 1)} \quad (6)$$

Con el objetivo de apreciar el potencial de la función M-L, la ecuación 6 se resolvió para diferentes valores de  $\beta$ , empleando un algoritmo en Matlab desarrollado por Roberto Garrappa (Garrappa, 2018). En la figura 2, se observa para  $0 < \beta \leq 1$ , un comportamiento que se asemeja a datos experimentales de pruebas mecánicas de relajación de esfuerzos en materiales viscoelásticos, o bien, a curvas de polarización o corrientes transitorias en materiales poliméricos sometidos a campos eléctricos (Puente-Córdova et al., 2020; Puente Córdova et al., 2012). Cuando el parámetro  $\beta$  es igual a 1, se obtiene la respuesta clásica de la función exponencial,  $M_1(-t^1) = e^{-t}$ .

En la figura 3, se puede observar cuando  $1 < \beta \leq 2$ , un comportamiento que corresponde a oscilaciones subamortiguadas, típicas de sistemas vibratorios del tipo masa-resorte-amortiguador. Cuando el parámetro  $\beta$  es igual a 2, se obtiene la respuesta tradicional de la función coseno,  $M_2(-t^2) = \cos(t)$ . Igor Podlubny y colaboradores han propuesto emplear a la función M-

L como función de ajuste a una gran diversidad de datos experimentales, dadas las propiedades presentadas en (Podlubny et al., 2012).

### 3. MODELADO DEL SISTEMA MKC

En el campo de las vibraciones mecánicas, el diseño requiere el desarrollo de modelos matemáticos que sean capaces de describir la naturaleza oscilatoria de las máquinas y estructuras. Para ello, bajo el enfoque de sistemas de parámetros concentrados, se requieren tres elementos fundamentales: masa, elasticidad y amortiguamiento. Se asume que estos elementos son lineales, y que el amortiguamiento es viscoso. Entonces, es posible construir un arreglo denominado oscilador armónico simple o sistema MKC, de 1 grado de libertad (GDL), cuya ecuación diferencial (ecuación 7) es de segundo orden, lineal y homogénea, para el caso de vibración libre.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (7)$$

Donde  $m$  es la masa,  $k$  es la elasticidad y  $c$  el amortiguamiento viscoso. La ecuación diferencial está escrita siguiendo la notación de Newton para derivadas tradicionales, teniendo que  $x$  es el desplazamiento vibratorio del sistema,  $\dot{x} = dx/dt$  es la velocidad y  $\ddot{x} = d^2x/dt^2$  es la aceleración. Para propósitos de este trabajo, se reescribe la ecuación 7 utilizando el operador diferencial de orden entero, por lo tanto,  $D_t^2 x = \ddot{x}$  y  $D_t^1 x = \dot{x}$ .

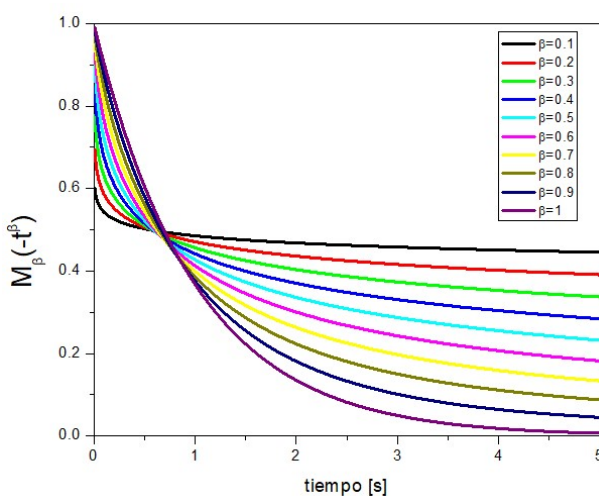


Figura 2. Función M-L evaluada para  $-t^{\beta}$ , donde  $0 < \beta \leq 1$

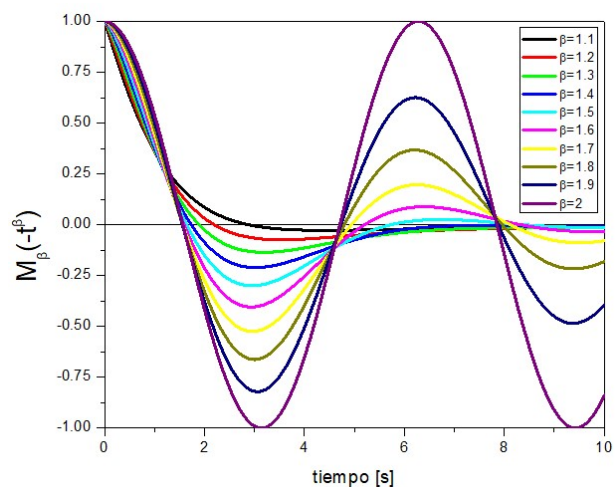


Figura 3. Función M-L evaluada para  $-t^{\beta}$ , donde  $1 < \beta \leq 2$

$$mD_t^2x + cD_t^1x + kx = 0 \quad (8)$$

Cuya solución general está dada por

$$x(t) = A \cdot \exp(s_1 t) + B \cdot \exp(s_2 t) \quad (9)$$

Donde  $s_1$  y  $s_2$  son las raíces de la ecuación característica  $ms^2 + cs + k = 0$ , las cuales se calculan de la siguiente forma:

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \quad (10)$$

$$= -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

Es importante mencionar que el sistema MKC de 1 GDL se caracteriza por presentar una frecuencia natural calculada como  $\omega_n^2 = k/m$ , la cual denota el ritmo de la vibración cuando se le da solo energía inicial y se le deja vibrar libremente. Dado la resta dentro de la raíz, la solución de la ecuación diferencial presenta tres tipos de respuestas vibratorias. Solo una de ellas es de naturaleza oscilatoria, denominada respuesta subamortiguada, mientras que las otras dos presentan una caída exponencial (casos crítico y sobreamortiguado). Dicha solución de la respuesta subamortiguada se representa con la ecuación 11:

$$x(t) = x_0 \cdot \exp\left(-\frac{c}{2m}t\right) \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}t\right) \quad (11)$$

En esta respuesta se observa el producto de dos funciones, la exponencial y coseno, lo cual denota físicamente una respuesta oscilatoria cuya amplitud disminuye de manera exponencial. Cuando el sistema mecánico sale de su posición de equilibrio, tiende a regresar a su posición inicial, manifestándose un fenómeno de oscilación-relajación. En la figura 4 se presenta lo discutido.

La forma de la curva teórica calculada a partir de la ecuación 11, funciona como una aproximación razonable a los datos experimentales obtenidos de ciertos sistemas vibratorios, pero para otros no. Para aminorar la diferencia teórico-experimental, una opción es el utilizar ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. En la literatura, se propone sustituir las derivadas de orden entero en las ecuaciones diferenciales, por operadores de orden fraccionario (Gómez-Aguilar et al., 2012, 2015; Gómez Aguilar et al., 2012). Aunque matemáticamente dicha estrategia es simple y correcta, desde el punto de vista dimensional no lo es. Un análisis dimensional de un

operador diferencial de orden entero y otro fraccionario demuestra que las unidades son diferentes, ver ecuación 12.

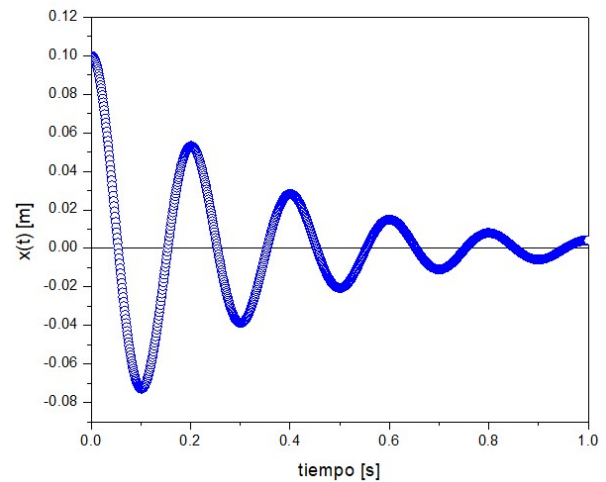


Figura 4. Solución de la ecuación diferencial de orden 2 del sistema MKC para el caso subamortiguado.

$$\frac{d^1}{dt^1} \sim \frac{1}{\tau}, \quad \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \sim \frac{1}{\tau^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (12)$$

Donde  $\alpha$  es el orden fraccionario y  $\tau$  es un parámetro que tiene unidades de tiempo (tiempo respuesta), cuya función principal es normalizar las unidades para que el sistema sea congruente. Por lo tanto, se puede establecer la siguiente ecuación:

$$\frac{\frac{d^1}{dt^1}}{\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}} = \frac{\frac{1}{\tau}}{\frac{1}{\tau^\alpha}} = \frac{\tau^\alpha}{\tau} = \tau^{\alpha-1} \quad (13)$$

Tomando en cuenta la ecuación 12, se establece una expresión matemática que puede ser utilizada para remplazar una derivada de primer orden por una derivada de orden fraccionario  $\alpha$ :

$$D_t^1 \rightarrow \frac{1}{\tau^{1-\alpha}} D_t^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (14)$$

Si la aceleración se define a través del operador  $D_t^2x$ , entonces es posible obtener la siguiente expresión:

$$D_t^2 \rightarrow \frac{1}{\tau^{2(1-\alpha)}} D_t^{2\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (15)$$

Sustituyendo los operadores 14 y 15 en la ecuación 8, y considerando que dichos operadores se definen bajo el enfoque de la derivada fraccionaria de Caputo, ecuación 2, se obtiene la siguiente ecuación diferencial fraccionaria para el sistema MKC:

$$\frac{m}{\tau^{2(1-\alpha)}} D_t^{2\alpha} x + \frac{c}{\tau^{1-\alpha}} D_t^\alpha x + kx = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (16)$$



La solución analítica de la ecuación diferencial fraccionaria se obtiene utilizando la transformada de Laplace, y para condiciones iniciales  $x(t=0) = x_0$ , y  $\dot{x}(t=0) = 0$  es:

$$x(t) = x_0 \cdot M_\alpha \left[ -\frac{c}{2m} \tau^{1-\alpha} t^\alpha \right] \cdot M_{2\alpha} \left[ -\left( \frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2} \right) \tau^{2(1-\alpha)} t^{2\alpha} \right] \quad (17)$$

donde  $x_0$  es la amplitud de vibración,  $M_*(z)$  es la función de Mittag-Leffler M-L, definida por la ecuación 5.

Un aspecto por resaltar es la generalización que proporciona el utilizar la función M-L, por ejemplo, el término  $M_\alpha$  es una generalización de una función exponencial, mientras que el término  $M_{2\alpha}$  lo es para una función coseno. Esto en conjunto representa una respuesta clásica subamortiguada, ver ecuación 11, pero con la particularidad de incluir efectos no lineales en el amortiguamiento del sistema. A diferencia de lo reportado en la literatura (Ertik et al., 2015; Escalante-

Martínez et al., 2020), donde utilizan el tiempo de Planck, en este trabajo se utiliza el tiempo respuesta  $\tau$ , también conocido como tiempo de relajación, el cual tiene sentido al trabajar con sistemas mecánicos en los que se tenga almacenamiento y disipación parcial de energía.

Para comparar la respuesta vibratoria de las soluciones clásica y fraccionaria, se evaluó numéricamente la ecuación 17, asumiendo parámetros típicos de una máquina industrial, con  $m=2,000$  kg,  $k=70,000$  N/m,  $c=7,100$  N-s/m, y  $x_0=0.1$  m. Se considera tomar valores del orden fraccionario  $0.5 < \alpha \leq 1$ , y cuando  $\alpha = 1$ , se recupera la respuesta clásica de la solución de la ecuación diferencial de orden dos, ecuación 11. A medida que disminuye el orden fraccionario, se observa que los máximos y mínimos se recorren a tiempos más prolongados, dando lugar a un comportamiento no lineal, distinto a lo observado en la teoría clásica.

Para visualizar la solución de la ecuación 17, figura 5, a continuación, se muestra un ejemplo de las líneas de código empleadas en Matlab, tomando de partida el algoritmo desarrollado por Garrappa (Garrappa, 2018) para evaluar la función Mittag-Leffler: 4.

```
>> t=0:0.1:10;
>> a=0.9;
>> b=1.8;
>> tao=0.1;
>> x=(0.1). *ml((-1.775).*(tao.^(1-a)).*(t.^a),a). *ml((-31.85).*(tao.^(2. *(1-a))).*(t.^(2. *a)),b);
>> plot(t,x)
```

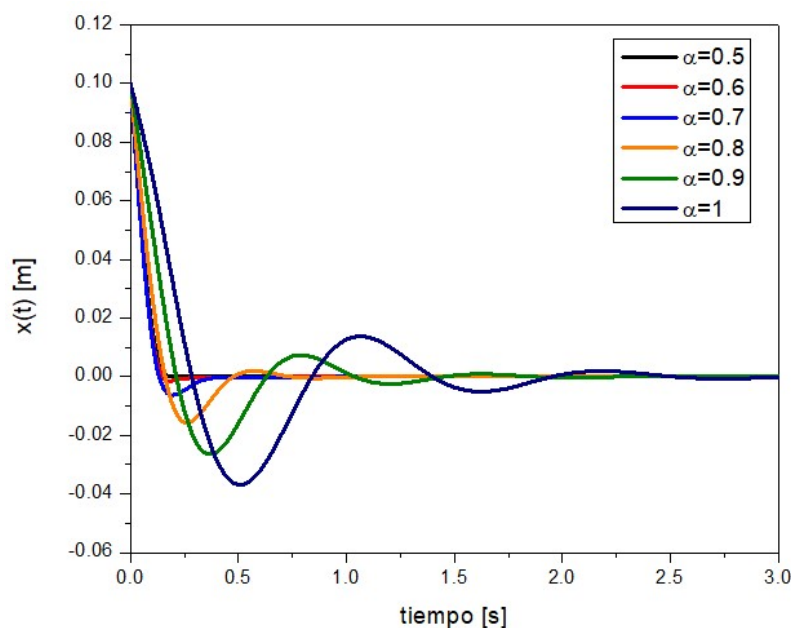


Figura 5. Solución de la ecuación diferencial de orden fraccionario del sistema MKC.

#### 4. COMENTARIOS FINALES

El cálculo fraccionario es una herramienta matemática que permite abordar de manera más precisa diversos fenómenos físicos no lineales. El desarrollo de nuevos materiales se aleja de un comportamiento lineal, pues busca llenar el nicho del diseño altamente especializado con requerimientos mayores de precisión.

Actualmente se exploran diferentes tipos de aproximaciones fraccionarias para diferentes tipos de amortiguamiento. Con la aproximación propuesta en este trabajo, usando una estructura similar a la clásica, se pueden ampliar las capacidades de análisis a fenómenos no lineales. El orden fraccionario se puede asociar con los mecanismos de disipación/almacenamiento de energía en sistemas vibratorios no lineales.

El advenimiento de computadoras y algoritmos más potentes ha abierto enfoques desde teóricos hasta por ajuste para la solución de sistemas con ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. Es importante cuidar la consistencia de las unidades para que el sistema sea razonablemente compatible con las normativas internacionales (SI).

#### REFERENCIAS

- Ertik, H., Çalik, A. E., Şirin, H., Şen, M., & Öder, B. (2015). Investigation of electrical RC circuit within the framework of fractional calculus. *Revista Mexicana de Física*, 61(1), 58–63.
- Escalante-Martínez, J. E., Gómez-Aguilar, J. F., Calderón-Ramón, C., Morales-Mendoza, L. J., Cruz-Orduña, I., & Laguna-Camacho, J. R. (2016). Experimental evaluation of viscous damping coefficient in the fractional underdamped oscillator. *Advances in Mechanical Engineering*, 8(4), 1–12. <https://doi.org/10.1177/1687814016643068>
- Escalante-Martínez, J. E., Morales-Mendoza, L. J., Cruz-Orduña, M. I., Rodríguez-Achach, M., Behera, D., Laguna-Camacho, J. R., López-Calderón, H. D., & López-Cruz, V. M. (2020). Fractional differential equation modeling of viscoelastic fluid in mass-spring-magnetorheological damper mechanical system. *European Physical Journal Plus*, 135(10), 1–14. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-020-00802-0>
- Garrappa, R. (2018). Numerical solution of fractional differential equations: A survey and a software tutorial. *Mathematics*, 6(2). <https://doi.org/10.3390/math6020016>
- Gómez-Aguilar, J. F., Rosales-García, J. J., Bernal-Alvarado, J. J., Cordova, T., & Guzmán-Cabrera, R. (2012). Fractional Mechanical Oscillators. *Revista Mexicana de Física*, 58, 348–352.
- Gómez-Aguilar, J. F., Yépez-Martínez, H., Calderón-Ramón, C., Cruz-Orduña, I., Escobar-Jiménez, R. F., & Olivares-Peregrino, V. H. (2015). Modeling of a mass-spring-damper system by fractional derivatives with and without a singular kernel. *Entropy*, 17(9), 6289–6303. <https://doi.org/10.3390/e17096289>
- Gómez Aguilar, J. F., Rosales García, J., Bernal Alvarado, J., & Guía, M. (2012). Mathematical modelling of the mass-spring-damper system - A fractional calculus approach. *Acta Universitaria*, 22(5), 5–11. <https://doi.org/10.15174/au.2012.328>
- Martínez Jiménez, L., Cruz-Duarte, J. M., Escalante-Martínez, J. E., & Rosales-García, J. J. (2021). Analytical and experimental study for mechanical vibrations of a two-coupled spring masses system via Caputo-based derivatives. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, November 2020, 1–19. <https://doi.org/10.1002/mma.7421>
- Ozores, A. L. (2014). Investigación Cálculo Fraccionario y dinámica newtoniana Fractional Calculus and newtonian dynamics. *Revista de Investigación MAIC*, IV(1), 77–106.
- Podlubny, I. (2001). *Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Fractional Differentiation*. 1–18. <http://arxiv.org/abs/math/0110241>
- Podlubny, I., Petráš, I., & Škovránek, T. (2012). Fitting of experimental data using Mittag-Leffler function. *Proceedings of the 2012 13th International Carpathian Control Conference, ICC 2012*, 578–581. <https://doi.org/10.1109/CarpathianCC.2012.6228711>
- Puente-Córdova, J. G., Reyes-Melo, M. E., Palacios-Pineda, L. M., Martínez-Perales, I. A., Martínez-Romero, O., & Elías-Zúñiga, A. (2018). Fabrication and characterization of isotropic and anisotropic magnetorheological elastomers, based on silicone rubber and carbonyl iron microparticles. *Polymers*, 10(12). <https://doi.org/10.3390/polym10121343>
- Puente-Córdova, Jesús Gabino, Rentería-Baltierrez, F. Y., & Reyes-Melo, M. E. (2020). La derivada

- conformable y sus aplicaciones en ingeniería. *Ingenierías*, 23(88), 20–31. <https://doi.org/10.29105/ingenierias23.88-3>
- Puente Córdova, J., Reyes Melo, M., López Walle, B., & González González, V. (2012). Materiales poliméricos dieléctricos. *Ingenierías*, 15(57), 29–37.
- Reyes-Melo, E., Martínez-Vega, J., Guerrero-Salazar, C., & Ortiz-Mendez, U. (2005). Application of fractional calculus to the modeling of dielectric relaxation phenomena in polymeric materials. *Journal of Applied Polymer Science*. <https://doi.org/10.1002/app.22057>
- Reyes-Melo, E., Martínez-Vega, J., Guerrero-Salazar, C., & Ortiz-Méndez, U. (2004). On the modeling of the dynamic-elastic modulus for polymer materials under isochronal conditions. *Journal of Applied Polymer Science*. <https://doi.org/10.1002/app.20898>
- Sánchez-Muñoz, J. M. (2011). Génesis y desarrollo del Cálculo Fraccional. *Pensamiento Matemático*.