

Esparcimiento de ondas en metamateriales acústicos

Wave scattering in acoustic metamaterials

Espalhamento de ondas em metamateriais acústicos

Ana Abreu, ORCID: 0000-0002-3507-1525

Departamento de Estructuras, Instituto de Estructuras y Transporte, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Uruguay

Correo de contacto: aabreu@fing.edu.uy

Resumen.

Este trabajo presenta una solución numérica vía método de elementos de contorno de un problema antiplano elastodinámico o acústico. El método permite analizar el esparramiento de ondas elásticas a través de un material isotrópico que contiene cavidades o inclusiones que modifican sus propiedades efectivas. Se interpreta a tales materiales como metamateriales. Los ejemplos numéricos presentados confirman la idea que es posible la fabricación de metamateriales que puedan reducir o amplificar la amplitud de las ondas. Esto se logra posicionando adecuadamente las cavidades o inclusiones, así como escogiendo adecuadamente sus propiedades materiales.

Palabras clave: Esparramiento de ondas; acústica armónica temporal; elastodinámica antiplana; metamateriales acústicos

Abstract.

This work presents a numerical solution via boundary element method for a elastodynamic antiplane or acoustic problem. The method allows analyzing the scattering of elastic waves through an isotropic material presenting cavities or inclusions that affect its effective properties. Such materials are interpreted as being metamaterials. The numerical examples presented confirm the idea that it is possible to fabricate metamaterials that can reduce or amplify the amplitude of waves. This is achieved locating adequately the cavities or inclusions, as well as choosing adequately its material properties.

Keywords: Wave scattering; time-harmonic acoustics; antiplane elastodynamics; acoustic metamaterials

Resumo.

Este trabalho apresenta uma solução numérica via método de elementos de contorno de um problema antiplano elastodinâmico e acústico. O método permite a análise do espalhamento de ondas elásticas em um material isotrópico contendo cavidades ou inclusões que modificam suas propriedades efetivas. Esses materiais são interpretados como metamateriais. Os exemplos numéricos apresentados confirmam a ideia de que é possível fabricar metamateriais que podem reduzir ou amplificar a amplitude das ondas. Isso é obtido com o posicionamento adequado das cavidades ou inclusões, além de escolher adequadamente suas propriedades materiais.

Palavras-chave: Espalhamento de ondas; acústica de tempo-harmônico; elastodinâmica antiplana, metamateriais acústicos

1. INTRODUCCIÓN

El esparcimiento de ondas en medios físicos es sumamente relevante en diversos problemas de la física y de la ingeniería. Por ejemplo, la reducción de ruido ha sido siempre una gran preocupación en la industria, donde el daño auditivo y el estrés mental que genera son temas críticos [1,2,3].

Otros ejemplos son el diagnóstico por ultrasonido en medicina [4], el control activo y pasivo del ruido y vibraciones en arquitectura [5]. Existen muchos problemas prácticos de la ingeniería estructural, como son la determinación de propiedades dinámicas de materiales compuestos, la concentración de tensiones, los ensayos no destructivos de materiales, la interacción fluido estructura y suelo estructura, que pueden ser analizados en el contexto de la propagación y el esparcimiento de ondas en medios sólidos y fluidos [6,7].

Para abordar el problema de la atenuación del ruido es común la utilización de diferentes tipos de materiales como son, por ejemplo, los materiales porosos. Sin embargo, los materiales porosos estándares usados para estos fines presentan un rendimiento acústico muy deficiente a bajas frecuencias, y su absorción acústica alcanza un límite cuando el espesor del material es igual a la profundidad de penetración acústica [8]. El concepto de doble porosidad [9] y la forma de cuña muestran que es posible mejorar la absorción acústica elementos constituidos por materiales porosos [10]. También se han propuesto diseños de materiales porosos conteniendo macrovacíos o perforados con agujeros de radios gradualmente variables y periódicos [8]. Este nuevo material diseñado puede mejorar la absorción acústica en una amplia banda de frecuencias en comparación con los materiales porosos convencionales.

Varios esquemas numéricos se han desarrollado durante las últimas décadas para resolver problemas de propagación de ondas. Las formulaciones que usan el Método de Elementos de Contorno (BEM, Boundary Element Method) han demostrado ser muy útiles en el análisis de problemas de acústica armónica temporal y de elastodinámica [11-16]. El BEM es un método numérico que se clasifica dentro de los métodos de ecuaciones integrales [17,18,19], que en este tipo de problemas es generalmente mucho más eficiente que los métodos de discretización de dominio como el método de elementos finitos [20]. La eficiencia del BEM se debe, fundamentalmente, a que solo se discretiza el contorno del problema estudiado. El beneficio numérico viene dado por la reducción importante del número de variables del problema discreto, permitiendo así una reducción importante del costo computacional [21].

En este trabajo se usa el BEM para estudiar numéricamente el problema del esparcimiento de ondas elásticas producido por inclusiones en un sólido bidimensional. Se sigue una metodología de análisis que es aplicable en varias áreas, debido a la similitud de la formulación matemática a resolver, por ejemplo: ondas electromagnéticas, acústicas, elásticas, sísmicas, sónicas en cristales, entre otras. En base a la referencia [8] se generan ejemplos para estudiar la influencia de la geometría y las propiedades de los materiales de una distribución de cavidades o inclusiones en la respuesta de un campo de ondas incidente. Los diseños analizados en este trabajo confirman la posibilidad de fabricación de metamateriales acústicos que, personalizados a voluntad, pueden reducir o amplificar la amplitud de las ondas acústicas mediante una adecuada distribución de las cavidades o inclusiones, así como la manipulación de las propiedades materiales de las mismas.

2. METAMATERIAL ACÚSTICO

La investigación en metamateriales ha crecido rápidamente en los últimos diez años motivada por sus numerosas aplicaciones. A pesar de no existir consenso en su definición, la palabra metamaterial se utiliza habitualmente para designar aquellos materiales que son diseñados para tener propiedades diferentes a las de los materiales convencionales. En otras palabras, los metamateriales son nuevos tipos de materiales específicamente diseñados y fabricados para realizar tareas que no se pueden lograr con materiales naturales. Suelen estar formados por pequeños componentes diseñados y dispuestos en una configuración ordenada que es determinada específicamente para la función prevista. Por esta razón, las propiedades de un metamaterial son logradas diseñando la estructura física geométrica, y no mediante modificaciones de su composición química. En problemas de ondas, por ejemplo, los metamateriales se obtienen diseñando microestructuras que resuenan a frecuencias específicas (sean ondas acústicas, mecánicas, electromagnéticas, sísmicas, o vibraciones mecánicas, entre otras). Si hablamos en términos específicos de fenómenos acústicos, entonces esas microestructuras son formadas por componentes que se repiten y que son habitualmente menores o mucho menores que la longitud de las ondas acústicas que se propagan en el medio. De esta manera, los metamateriales acústicos pueden ser usados por ejemplo para atenuar el sonido en ciertos rangos de frecuencias [22].

En este trabajo se estudia un metamaterial logrado colocando en una cierta matriz incrustaciones de otro material formando un patrón periódico, como

presentado en [8]. En el caso habitual la microestructura consiste en un patrón periódico de inclusiones en el material base, en este trabajo se sustituyen esas inclusiones por un material de propiedades diferentes, lo cual enriquece las posibilidades de diseño, puesto que las propiedades del material insertado también pueden ser escogidas.

3. PROBLEMA DIRECTO DE ESPARCIMIENTO DE ONDAS

Suponemos que existe un campo incidente de ondas acústicas emitidas desde una fuente lejana hacia una inclusión más o menos penetrable, denominado esparcidor (*scatterer*). Cuando las ondas interactúan con la inclusión, se generan ondas que componen un campo emergente de ondas esparcidas (*scattered waves*). A este proceso se le denomina esparcimiento (*scattering*). Se denomina problema directo (*forward problem*) al problema de determinar el campo de ondas esparcidas conociendo la geometría, la propiedad de la inclusión y la fuente de ondas incidentes. Se denomina problema inverso (*inverse problem*) al problema de obtener información sobre la inclusión (sea su forma, sus propiedades, u otra característica) o sobre la fuente a partir de medidas del campo de ondas esparcidas [23,24]. En la Figura 1 se observa una representación del problema bidimensional de esparcimiento de ondas elásticas debido a una inclusión Ω incrustada en una matriz infinita.

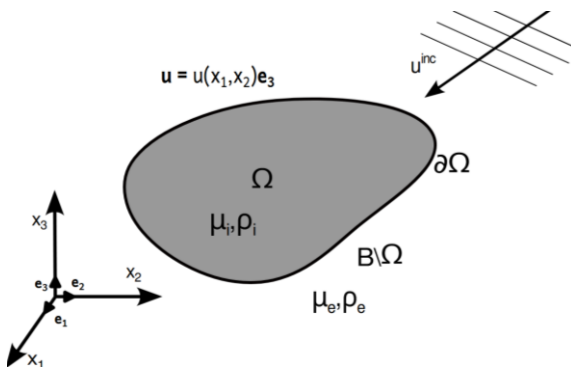


Figura 1: Problema 2D de esparcimiento de ondas elásticas por una inclusión.

Se consideran los desplazamientos u^{inc} de una onda incidente que se desplaza en el plano (x_1, x_2) a través de un medio con propiedades mecánicas μ_e y ρ_e (propiedades del medio exterior), en el que se encuentra una inclusión Ω de contorno $\partial\Omega$ con propiedades mecánicas μ_i y ρ_i (propiedades del medio interior). En la figura anterior, $\mathbf{u}$ representa al vector desplazamiento transversal en el dominio de la frecuencia, el cual es dado por $\mathbf{u} = u(x_1, x_2)\mathbf{e}_3$ (se asume que la onda es polarizada en la dirección x_3) y

corresponde a los desplazamientos totales, es decir, la suma de la onda incidente y la esparcida que se genera al chocar la onda incidente en Ω . Las propiedades μ y ρ se refieren al módulo elástico de cizallamiento y la densidad de masa, respectivamente. Las correspondientes velocidades de fase c de las ondas son $c_e^2 = \mu_e / \rho_e$ y $c_i^2 = \mu_i / \rho_i$. Si la frecuencia angular de la onda incidente es ω , entonces los números de onda son $k_e^2 = \omega^2 \rho_e / \mu_e$ y $k_i^2 = \omega^2 \rho_i / \mu_i$, siendo las longitudes de onda $\lambda_e = 2\pi / k_e$ y $\lambda_i = 2\pi / k_i$ en cada medio. Tanto el material del interior del dominio Ω como del exterior se consideran uniformes e isotrópicos.

Los desplazamientos u satisfacen la ecuación siguiente:

$$\nabla \cdot (\mu \nabla u) + \rho \omega^2 u + f^{inc} = 0, \quad (1)$$

así como la condición de radiación de Sommerfeld en todas las direcciones:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} [\partial_r (u - u^{inc}) - ik_e (u - u^{inc})] = 0. \quad (2)$$

El término f^{inc} de la ecuación (1) es la fuente de la onda incidente. La onda incidente u^{inc} (solución del problema en el medio homogéneo) es el desplazamiento conocido, que satisface la ecuación de campo:

$$\nabla \cdot (\mu_e \nabla u^{inc}) + \rho_e \omega^2 u^{inc} + f^{inc} = 0. \quad (3)$$

Se asume que u^{inc} es conocida, mientras que las ecuaciones (1) y (2) deben ser resueltas utilizando un método numérico como el BEM [24]. Para ciertas propiedades materiales este problema está bien planteado y admite una solución única [25].

4. FORMULACIÓN DEL BEM

El método Galerkin BEM [24] consiste en hallar $u_i = u|_{\partial\Omega}$ y $\phi_e = \partial_n(u - u^{inc})|_{\partial\Omega}$, tal que:

$$\langle (W_i + W_e)u_i + (M_i + M_e)\phi_e, v \rangle = \langle W_e u^{inc} - (M_i - \frac{1}{2}I)\phi^{inc}, v \rangle; \forall v \in H^{1/2}(\partial\Omega), \quad (4)$$

$$\langle (K_i + K_e)u_i - (V_i + V_e)\phi_e, \varphi \rangle = \langle (K_e - \frac{1}{2}I)u^{inc} + V_i\phi^{inc}, \varphi \rangle; \forall \varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega), \quad (5)$$

donde $\langle g, v \rangle = \int_{\partial\Omega} g \bar{v} ds$ y los operadores del contorno son dados por:

$$V_a \phi(x) = \int_{\partial\Omega} G_a(x, y) \phi(y) ds, \quad (6)$$

$$K_a u(x) = \int_{\partial\Omega} \mu_a \partial_{n_y} G_a(x, y) u(y) ds, \quad (7)$$

$$M_a \phi(x) = \int_{\partial\Omega} \mu_a \partial_{n_x} G_a(x, y) \phi(y) ds, \quad (8)$$

$$W_a u(x) = - \int_{\partial\Omega} \mu_a^2 \partial_{n_x} \partial_{n_y} G_a(x, y) u(y) ds. \quad (9)$$

En estas expresiones el subíndice “a” corresponde a “i” o “e” según se trabaje con el medio interior o el exterior, respectivamente. La función G_a es la solución fundamental dada por:

$$G_a(x, y) = \frac{i}{4\mu_a} H_0^{(1)}(k_a |x - y|), \quad (10)$$

donde $H_0^{(1)}$ es la función de Hankel de primer tipo y orden cero. Discretizando el contorno $\partial\Omega$ se obtiene la solución numérica de esparsamiento en términos del desplazamiento u_i y la derivada normal ϕ_e .

5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

En esta sección se presentan siete ejemplos numéricos de esparsamiento de ondas en metamateriales acústicos. Se considera el problema simple bidimensional de una inclusión circular Ω de radio r centrada en el origen del sistema de coordenadas con propiedades materiales constantes μ_i y ρ_i . El medio circundante posee propiedades μ_e y ρ_e . Se consideró una onda plana incidente de amplitud u_0 igual a la unidad.

En todos los ejemplos la inclusión fue discretizada en 512 elementos de contorno lineales. Los resultados se presentan sobre un medio exterior circundante de dimensiones 6 cm x 6 cm. Para todos los ejemplos se presentan resultados en un punto A de coordenadas (0, 2.44) localizado en el medio exterior a la inclusión circular. Se estudió el efecto producido al mudar el tamaño de las inclusiones, su cantidad y distribución, así como sus propiedades.

5.1 Estructura 1

En este caso la estructura es formada por una inclusión con radio de dimensiones comparables con la longitud de onda del medio exterior tal que $2r=\lambda_e$. El medio exterior tiene las propiedades: $c_e=1706.6$ m/s, $\rho_e=1240.0$ kg/m³ y $\mu_e=3.6115$ GPa. Para el medio interior las propiedades son: $c_i=2c_e$, $\rho_i=2\rho_e$ y $\mu_i=8\mu_e$. En la Figura 2 se observa el resultado obtenido para el campo de la onda debido a una sola inclusión. Se obtuvo el valor $|u|/u_0=0.266$ en el punto A.

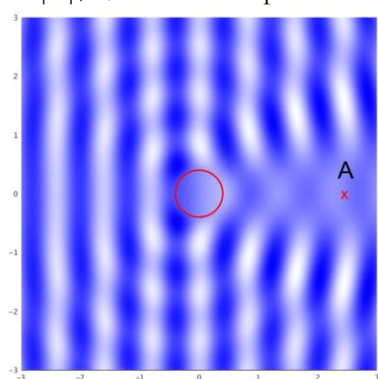


Figura 2: Problema de una inclusión de radio $2r=\lambda_e$.

En esta figura se observa claramente la sombra acústica provocada por la inclusión cuando posee dimensiones comparables con la longitud de la onda.

5.2 Estructura 2

En este caso la estructura es formada por 9 inclusiones con radio de dimensiones $2r=\lambda_e$. Las propiedades del

medio exterior e interior a las inclusiones se mantienen. En la Figura 3 se observa el resultado obtenido para el campo de la onda debido a las 9 inclusiones. Se obtuvo el valor $|u|/u_0=0.652$ en el punto A.

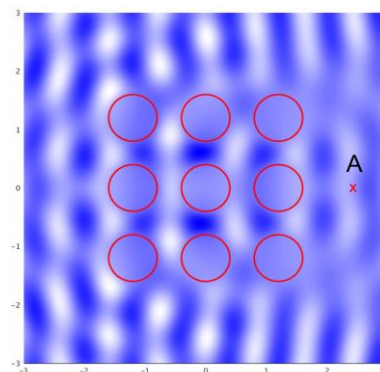


Figura 3: Problema de 9 inclusiones de radio $2r=\lambda_e$.

En la figura anterior también se observa de forma clara la sombra acústica provocada, la cual se distribuye en un área mayor. Sin embargo, la amplitud medida en el mismo punto A del ejemplo 1 es mayor. Podemos decir entonces que esta configuración de inclusiones es ineficaz si lo que se busca es reducir la amplitud de la onda en el punto A.

5.3 Estructura 3

En este caso la estructura es formada por 13 inclusiones en total: 9 inclusiones con radio de dimensiones $2r=\lambda_e$ y otras 4 inclusiones con la mitad de ese radio. Las propiedades del medio exterior e interior a las inclusiones se mantienen. En la Figura 4 se observa el resultado obtenido para el campo de la onda debido a las 13 inclusiones. Se obtuvo el valor $|u|/u_0=0.395$ en el punto A.

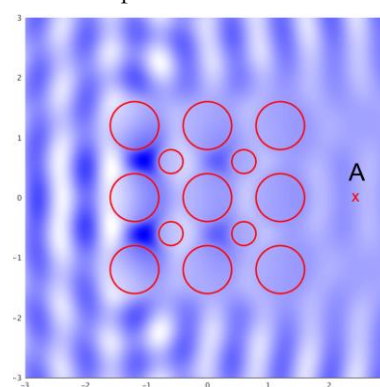


Figura 4: Problema de 13 inclusiones de radios diferentes. Radio mayor $2r=\lambda_e$.

En la figura anterior también se observa que la sombra acústica está más distribuida y más atenuada en relación al ejemplo anterior. Es posible observar cómo la amplitud de los desplazamientos es importante en

las proximidades de las inclusiones de radio menor. En este ejemplo, la amplitud de los desplazamientos en el punto A presentó una disminución importante con respecto al ejemplo anterior.

5.4 Estructura 4

En este caso la estructura es formada por una inclusión con radio la mitad que el radio de los ejemplos previos, o sea, $r=\lambda_e$. Se trabaja con los mismos valores de propiedades del medio exterior e interior. En la Figura 5 se observa el resultado obtenido para el campo de ondas debido a la inclusión.

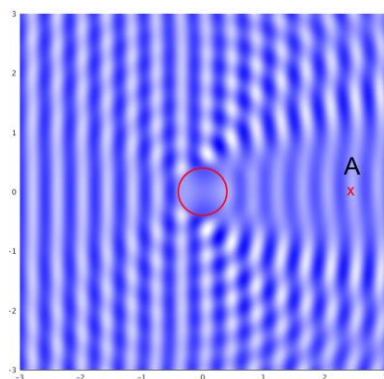


Figura 5: Problema de una inclusión de radio $r=\lambda_e$.

Se obtuvo un valor absoluto de desplazamiento $|u|/u_0=0.664$ en el punto A. Sin embargo, esta amplitud resultó ser mayor que la amplitud atenuada en el ejemplo 1.

5.5 Estructura 5

En este caso la estructura es formada por 9 inclusiones con radio de dimensiones $r=\lambda_e$. Las propiedades del medio exterior e interior a las inclusiones se mantienen. En la Figura 6 se observa el resultado obtenido para el campo de la onda debido a las 9 inclusiones.

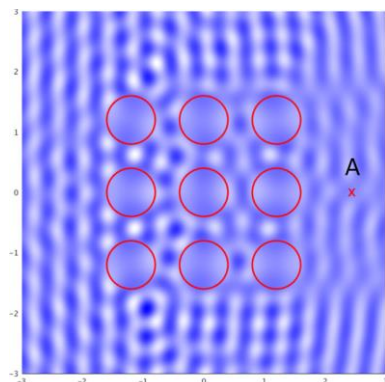


Figura 6: Problema de 9 inclusiones de radio $r=\lambda_e$.

Se obtuvo un valor $|u|/u_0=0.189$ en el punto A. La sombra acústica es extendida en un área mayor que el área del ejemplo 4. La amplitud medida para los

desplazamientos en el mismo punto A es sensiblemente menor que la misma configuración del ejemplo 2.

5.6 Estructura 6

En este caso la estructura es formada por 13 inclusiones en total: 9 inclusiones con radio de dimensiones $r=\lambda_e$ y otras 4 inclusiones con la mitad de ese radio. Las propiedades del medio exterior e interior a las inclusiones se mantienen. En la Figura 7 se observa el resultado obtenido para el campo de la onda debido a las 13 inclusiones.

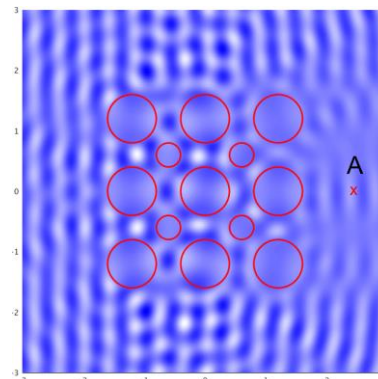


Figura 7: Problema de 13 inclusiones de radios diferentes. Radio mayor $r=\lambda_e$.

Se obtuvo un valor $|u|/u_0=0.686$ en el punto A. En la figura anterior se observa la sombra acústica provocada que se comporta similar al ejemplo 5 anterior. En esta situación de este ejemplo 6 las inclusiones de radios menores parecen no aportar mucho para la atenuación de los desplazamientos en A como ocurrió de forma efectiva en el ejemplo 3. Este resultado indica que, para atenuar la amplitud acústica en este tipo de superficie diseñada, no solo existe un compromiso entre las dimensiones de las inclusiones, sino que también es importante la posición y distribución que ocupan.

5.7 Estructura 7

En este caso la estructura es formada por 13 inclusiones en total: 9 inclusiones con radio de dimensiones $2r=\lambda_e$ y otras 4 inclusiones con la mitad de este último radio. Las propiedades del medio exterior se mantienen, mientras que las del interior son: $c_i=c_e/2$, $\rho_i=\rho_e/2$ y $\mu_i=\mu_e/8$, o sea, en esta situación el medio exterior posee mayor rigidez y densidad. En la Figura 8 se observa el resultado obtenido para el campo de la onda debido a las 13 inclusiones.

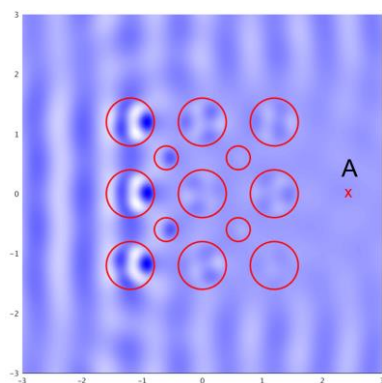


Figura 8: Problema de 13 inclusiones de radios diferentes y propiedades invertidas. Radio mayor $2r=\lambda_c$.

Para este ejemplo se obtuvo en el punto A un valor $|u|/u_0=0.210$. En la figura anterior se observa una sombra acústica bastante uniforme y atenuada. En esta situación se observa cómo la amplitud de los desplazamientos es mayor en el interior de las primeras inclusiones de mayor radio. Luego las amplitudes decrecen progresivamente hasta que en el punto A se observa una disminución importante.

6. CONCLUSIONES

Fue utilizado un método Galerkin BEM para la solución numérica del problema de esparcimiento de ondas bidimensional en un medio sólido homogéneo conteniendo inclusiones de material diferente. Se demostró la influencia de la longitud de la onda cuando es comparable con la dimensión característica de la inclusión y la influencia de las propiedades de los diferentes materiales.

La interpretación de los resultados fue realizada en términos de la amplitud del desplazamiento de la onda después de atravesar las inclusiones diseñadas.

En estudios futuros se calcularán variables acústicas relevantes como, por ejemplo, impedancia acústica, presión sonora, pérdida de transmisión acústica (STL, Sound Transmission Loss), coeficiente de absorción acústica, etcétera. También se estudiará la periodicidad y forma óptima de las cavidades/inclusiones para así obtener metamateriales acústicos más eficientes.

REFERENCIAS

- [1] Cobo, P.; Cuesta, M. (2018). El ruido. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. España.
- [2] Attenborough, K.; Tokarev, V.I.; Zaporozhets, O. (2011). Aircraft noise, assessment, prediction and control. Spon Press.
- [3] Siano, D. (2012). Noise control, reduction and cancellation solutions in engineering. Intech.
- [4] Schmidt, G.; Greiner, L.; Nuernberg, D. (2014).

Differential diagnosis in ultrasound imaging. Thieme.

- [5] Maekawa, Z.; Rindel, J.H.; Lord, P. (2011). Environmental and architectural acoustics. Spon Press.
- [6] Bungey, J.H.; Millard, S.G. (1995). Testing of concrete in structures. Spon Press.
- [7] Graff, K.F. (1991). Wave motion in elastic solids. Dover Publications.
- [8] Laly, Z.; Panneton, R.; Atalla, N.; Ghinet, S.; Mechefske, C.; Verdière, K. (2024). Improvement of sound absorption of porous materials through periodic holes of sinusoidal decreasing profile. Proceedings of Meetings on Acoustics; 54:022001.
- [9] Oluy, X.; Boutin, C. (2003). Acoustic wave propagation in double porosity media. The Journal of the Acoustical Society of America; 114(1):73–89.
- [10] Bonfiglio, P.; Pompoli, F. (2013). Numerical methodologies for optimizing and predicting the low frequency behavior of anechoic chamber. The Journal of the Acoustical Society of America; 134:285–291.
- [11] Kobayashi, S. (2000). Wave analysis and boundary element method. Kyoto University Press, (in Japanese).
- [12] Mansur, W.J.; Brebbia, C.A. (1983). Transient elastodynamics using a time-stepping technique. In: Boundary Elements. Springer-Verlag.
- [13] Kane, J.H. (1994). Boundary element analysis in engineering continuum mechanics. Prentice Hall.
- [14] Brebbia, C.A.; Telles, J.C.F.; Wrobel, L.C. (1984). Boundary element techniques. Theory and applications in engineering. Springer-Verlag.
- [16] Hirose, S. (1991). Boundary integral equation method for transient analysis of 3-D cavities and inclusions. Engineering Analysis with Boundary Elements; 8(3):146–53.
- [17] Abreu, A. (2016). Método de elementos de contorno. Apuntes de curso. Universidad de la República. Uruguay.
- [18] Muskhelishvili, N.I. (1958). Singular integral equations. Springer.
- [19] Mykhas'kiv, V.V. (2005). Transient response of a plane rigid inclusion to an incident wave in an elastic solid. Wave Motion; 41:133–44.
- [20] Canelas, A. (2020). Método de elementos finitos. Apuntes de curso. Universidad de la República. Uruguay.
- [21] Wu, T.W. (2000). Boundary element acoustics. WIT Press.
- [22] Kumar, S.; Lee, H.P. (2019). The present and future role of acoustic metamaterials for

- architectural and urban noise mitigations. *Acoustics*; 1:590–607.
- [23] Colton, D.; Monk, P. (1992). The numerical solution of an inverse scattering problem for acoustic waves. *IMA Journal of Applied Mathematics*; 49(2):163–184.
- [24] Canelas, A.; Abreu, A.I.; Roche, J.R. (2023). Detection of scatterers using an XFEM-BEM level set solver based on the topological derivative. *Inverse Problems*; 40(1):015007.
- [25] Rapún, M.L.; Sayas, F.J. (2008). Mixed boundary integral methods for Helmholtz transmission problems. *Journal of Applied Mathematics and Computing*; 214:238–258.